

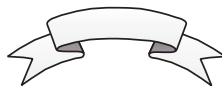


مركز تمويل التنمية
للمغرب العربي

INSTITUT DE FINANCEMENT
DU DEVELOPPEMENT DU MAGHREB ARABE
I.F.I.D

Formation Longue

Décisions Financières



EVALUATION FINANCIERE DES PROJETS

Chapitre I : Définitions et généralités.

La notion de projet tire son origine de la planification. Réaliser un projet, c'est vouloir une finalité qui devra se construire à partir de ce qui existe déjà (la situation de référence). Le projet n'est donc pas la description de l'état final recherché mais ce qui permet d'atteindre cet état. Si un projet est souvent lié à un produit, il s'en démarque par le fait qu'un projet est toujours le résultat d'une construction par rapport à une situation de référence, en relation avec une ou plusieurs finalités. L'évaluation d'un projet n'a de valeurs ou de significations que dans le domaine des finalités visées. Il sera donc important de présenter de préciser ces finalités ou objectifs préalables à l'évaluation.

I- Définition financière d'un projet d'investissement

Sous l'aspect financier, un projet d'investissement représente l'acquisition d'un ensemble d'immobilisations, permettant de réaliser ou de développer une activité donnée. Sa réalisation se traduit par des dépenses dont on attend des revenus futurs.

1- Classification des projets

Le concept de projet recouvre une grande diversité et on rencontre de nombreuses typologies. Souvent les projets sont classés par finalité et par activité.

a- Selon la finalité, on peut distinguer :

► Les Projets de création de produits nouveaux

Leur originalité tient d'abord au fait que nous cherchons à mesurer la rentabilité d'un produit qui n'existe pas encore.

Pour aboutir au produit, il sera nécessaire de définir les caractéristiques du bien (ou du service), de son marché et de son processus d'élaboration.

Le point le plus sensible est souvent représenté par le marché du produit (validité des prévisions commerciales).

Il sera nécessaire de faire plusieurs hypothèses et de tester les possibilités d'adaptation à une modification du marché.

► Les projets d'investissements de productivité

Leur finalité tient au fait que l'entreprise cherche à mesurer l'opportunité du changement d'un équipement, et non la rentabilité de l'équipement (problème de la catégorie précédente). De ce fait, la rentabilité du produit peut rester bonne et le changement d'équipement s'avérer mauvais (et inversement).

Le produit est connu, la demande déjà appréciée. Toute la difficulté réside dans le calcul des coûts et notamment l'intégration correcte des changements induits par le nouvel équipement : le coût de la formation, de la nouvelle organisation

► Les Projets d'investissements de capacité

. La finalité de ce type de projet est le changement de taille de la production à partir d'une modification de la demande. Il s'agit donc de déterminer une nouvelle capacité optimale de l'investissement. Parmi leurs particularités, nous retrouverons les points sensibles précédents : l'incertitude du nouveau marché, l'intégration du coût du changement technologique.

► Les Projets d'investissements collectifs ou sociaux

Le terme social a un double sens ; il peut signifier ce qui concerne le personnel d'une entreprise ou la nature collective du projet.

Dans le premier cas, nous trouvons les investissements relatifs aux conditions générales de vie dans une entreprise (équipements administratifs de toutes sortes).

Dans le second cas, nous avons tous les projets d'aménagement (d'infrastructure) ou de façon générale tous les projets publics de substitution à l'initiative privée. L'étude de ces projets ne devrait être analysée que du point de vue de la collectivité. Seule l'évaluation économique peut rendre compte de l'opportunité de ces projets

► Les Projets de développement

Ces projets peuvent concerner toutes les catégories précédentes, mais avec une composante particulière dans la finalité, qui est celle du développement.

I-1-2) Selon l'activité, on peut distinguer :

► Le cas des secteurs agricole et industriel

L'opposition de ces secteurs est traditionnelle. Les particularités du secteur agricole tiennent souvent à la spécificité de la fonction de production (êtres vivants par rapport à des objets), qui obéit à des règles différentes.

► Le cas de la réalisation d'un service

Les caractéristiques majeures des services sont l'intangibilité, la simultanéité (absence de stock) et l'interactivité (présence souvent active du client). Ces caractéristiques induisent des difficultés de définition et de standardisation du contenu des services offerts. L'élaboration et l'évaluation d'un service restent soumises à de plus fortes contraintes dues à l'existence d'un support et à la proximité du client. Le découpage des charges en variables et fixes est souvent plus délicat.

► Le cas de la saisonnalité des ventes

Il correspond à une variation significative des ventes ou (et) de la production à l'intérieur de l'année, que l'on rencontre dans des projets agricoles (cultures saisonnières) ou des projets industriels (jouets, cadeaux...).

Les particularités concernent surtout le calcul du besoin en fonds de roulement et de la Trésorerie.

► Le cas d'une durée du cycle d'exploitation supérieure à l'année

Cette situation est notamment rencontrée dans les projets d'infrastructure.

2- L'évaluation financière des projets.

On distingue traditionnellement six grandes étapes dans l'élaboration des projets :

- Etape 1 : Identification du produit ;
- Etape 2 : études préalables ;
- Etape 3 : Etude de faisabilité
- Etape 4 : L'évaluation économique
- Etape 5 : L'évaluation financière
- Etape 6 : décision d'exécution.

Ce découpage est néanmoins un peu artificiel dans la mesure où certaines phases coexistent ; ainsi, les études préalables aident à mieux réaliser l'identification. Mais il marque quand même une certaine logique de la progression.

L'importance relative de ces différentes phases dépend bien entendu des projets. Par exemple, l'évaluation économique, déterminante dans un projet d'infrastructure, est plus réduite ou même absente dans un projet de création d'un bien de consommation courante.

a- Définition de l'évaluation financière

L'évaluation financière est la phase de l'élaboration d'un projet qui permet d'analyser si ce projet est viable, et dans quelles conditions, compte tenu des normes et des contraintes qui lui sont imposées, et à partir des études techniques et commerciales déjà réalisées.

Elle consiste à valoriser les flux résultant des études précédentes pour déterminer la rentabilité et le financement du projet.

Pour cela, on construit généralement plusieurs scénarios résultant d'une analyse de sensibilité menée à partir des différents risques encourus par le projet et permettant de définir des stratégies de réalisation.

Une évaluation financière peut être sommaire ou détaillée. Le caractère sommaire de l'évaluation financière pourra apparaître au travers des détails suivants :

- un seul investissement (durée de vie unique) réalisé alors que l'investissement est généralement composite ;
- pas de montée en production ;
- Non prise en compte des besoins en fonds de roulement (ou estimation forfaitaire) ;
- non intégration de la fiscalité.
- un seul scénario envisagé ;
- inflation non prise en considération.

b- Méthodologie de l'évaluation financière

L'évaluation financière d'un projet se décompose en trois grandes phases :

- l'étude avant financement ;
- l'étude du financement et de la trésorerie ;
- la présentation des résultats et des stratégies de réalisation.

La séparation des deux premières s'explique par la nécessité d'envisager au départ le projet sous l'angle de la création de richesses. Le financement introduit une finalité nouvelle indispensable à la réalisation du projet, la recherche des fonds, mais aussi une autre mesure des résultats. La troisième phase est destinée à mettre en valeur les différents résultats et les stratégies mises en œuvre pour assurer la réussite du projet.

Un certain nombre d'études complémentaires seront nécessaires dans la mesure où cette phase peut se réaliser dans le cadre d'une étude sommaire. Il faudra compléter l'évaluation dans les domaines insuffisamment traités comme la montée en production ou le BFR. L'inflation et la fiscalité devront normalement être complètement intégrées à la fin de cette phase.

Lorsque l'architecture des comptes est connue avec assez de précision, on peut alors procéder à une étude de sensibilité des principaux résultats aux différentes variables. L'objectif est de détecter les points les plus sensibles des différentes variantes techniques étudiées du projet. Ce qui constitue une des meilleures approches de la notion de risque encouru par le projet.

c- Les pré-requis à l'évaluation avant financement:

L'étude du financement ne sera abordée dans ce document. Seule la rentabilité avant financement sera examinée. Le point central de cette phase est la détermination de la rentabilité financière qui est fondée sur une logique de flux de fonds, de flux de trésorerie ou cash-flows. L'estimation des flux de fonds générés par le projet nécessite l'élaboration d'un certain nombre de documents prévisionnels dont notamment :

- Le plan d'investissements ;
- le tableau des amortissements ;
- le compte prévisionnel de résultat.
- Un document des besoins en fonds de roulement ;

► Les investissements

L'objectif est de construire un tableau (le plan d'investissement) contenant année par année les investissements à réaliser au cours de la durée de vie du projet. Dans ce plan, nous trouvons en premier lieu les investissements initiaux, créés pour le démarrage du projet (début année 1). Ils correspondent à la capacité de production prévue au départ. Viennent ensuite les investissements d'expansion, destinés à accroître la capacité de production, au cours de la durée de vie du projet. Ils vont donc intervenir en fonction des augmentations de capacité de production prévues. Nous avons aussi les investissements de renouvellement, qui doivent être calculés et intégrés par l'analyste financier. Ils interviennent à la fin de la durée effective d'amortissement. Sans autre information, il faudra effectuer systématiquement le renouvellement en fonction de la durée d'amortissement comptable. De même, il sera toujours supposé que le matériel amorti disparaît de l'actif (il y a substitution entre ancien et nouveau). La valeur de revente est éventuellement à étudier (calcul des plus-values dans le compte de résultat).

► Les Amortissements

L'amortissement est la constatation comptable d'une dépréciation réalisée (ou prévue) périodiquement sur la durée de vie d'un équipement (ou toute autre immobilisation). Les différentes dotations permettent l'étalement d'une dépense dont les effets dépassent largement le cadre d'un exercice (notion même de l'investissement). Ces mêmes dotations, une fois cumulées, permettent de renouveler l'immobilisation, de manière à maintenir constante la capacité de production.

► Le compte de résultat prévisionnel

La construction du compte de résultat prévisionnel et son analyse (profitabilité, productivité, sensibilité). Constitue un point central dans l'évaluation avant financement.

► Le besoin en fonds de roulement

Le besoin en fonds de roulement (BFR) est une donnée issue de l'exploitation, correspondant (dans le cas où il est positif) à une mobilisation de ressources au même titre que l'investissement. Cette notion interviendra dans les calculs de rentabilité et dans la détermination des besoins de financement. Il sera donc nécessaire de prévoir le besoin en fonds de roulement de chaque projet ainsi que sa variation.

Le besoin en fonds de roulement a deux composantes : un BFR d'exploitation et un BFR hors exploitation.

$$\text{BFR} = \text{BFR d'exploitation} + \text{BFR hors exploitation}$$

Le BFR d'exploitation est la différence algébrique entre « l'actif circulant d'exploitation et le passif d'exploitation ». C'est lui qui nous intéresse principalement pour l'évaluation financière des projets. Il correspond aux stocks et aux créances clients diminués du montant des dettes fournisseurs. Son contenu résulte donc de données endogènes locales (habitudes de règlement des clients et fournisseurs par exemple), ou des besoins spécifiques de la production et de la distribution (stocks). De ce fait, le BFR peut être normalement négatif ou positif (en fonction des éléments qui le constituent) selon les produits et les lieux de production.

Le besoin en fonds de roulement est une donnée qui, mesurée au jour le jour, évolue d'une manière irrégulière et qui est sujette à des fluctuations. L'irrégularité s'explique par le fait que les divers encaissements et décaissements n'ont pas tous lieu en même temps. Les créances et les dettes sont composées d'éléments qui ont des termes différents et sont souvent de nature cyclique. Les fluctuations résultent des perturbations dans l'arrivée des factures et des chèques, ainsi que dans la réalisation de la production. Ces deux éléments seront à dissocier.

Il est donc possible de faire appel à des moyennes ou à des tendances pour estimer le besoin en fonds de roulement. C'est ce qu'exprime la notion de BFR normatif qui correspond à la tendance d'évolution des différents flux composant le besoin en fonds de roulement. Le BFR normatif sera directement calculé à partir de l'activité prévue.

Chapitre II : Les critères usuels d'évaluation financière des projets d'investissements.

L'étude financière d'un projet d'investissement pose le double problème de la liquidité (une dépense immédiate suivie de recettes échelonnées dans le temps) et la rentabilité (une immobilisation de fonds impliquant un coût qu'il faut couvrir). Divers critères ont été élaborés pour tenir compte de double aspect de la décision d'investissement. Ces critères peuvent être regroupés en deux catégories principales: les critères atemporels et les critères fondés sur l'actualisation.

I- Les critères atemporels.

Ce sont des indices qui ne prennent pas en considération le facteur temps. Ils continuent cependant de bénéficier de la faveur de certains praticiens qui tiennent essentiellement à leur facilité de maniement.

1- Le taux moyen de rentabilité.

Il se formule comme suit:

$$\text{Taux moyen de rentabilité} = \frac{\text{Résultat net moyen annuel}}{\text{Niveau moyen des dépenses d'investissement}}$$

Ce critère, fondé sur les résultats comptables moyens, présente l'inconvénient majeur de ne pas prendre en considération la répartition des résultats attendus dans le temps.

2- Le délai de récupération.

Le délai de récupération ou " pay-back" peut être défini comme la durée nécessaire pour que le cumul des cash-flows attendus d'un projet couvre la dépense d'investissement.

Ce critère, qui accorde une grande importance à la liquidité, traduit le souci de préserver l'équilibre financier de l'entreprise.

Comme le taux moyen de rentabilité, il comporte l'inconvénient de ne pas tenir compte de la répartition des cash-flows dans le temps.

Par ailleurs, il est peu adapté à l'évaluation des projets dont la durée de vie est relativement longue.

II - Les critères fondés sur l'actualisation.

Le principal avantage de ces critères réside dans la prise en considération du facteur temps qui est un facteur essentiel dans toute prise de décision financière.

Les critères basés sur l'actualisation sont nombreux. Dans ce document, nous nous limitons à la présentation des trois principaux : La valeur actuelle nette (VAN), le taux de rendement interne (TRI) et le Taux de rendement global TRG.

1- Le critère de la valeur actuelle nette (VAN).

Cette méthode d'évaluation des projets d'investissements consiste à comparer la valeur actuelle des dépenses d'investissement à la valeur actuelle des cash-flows attendus sur la durée de vie du projet d'investissement. Un projet est accepté si sa valeur présente est positive ou, ce qui est équivalent, si la valeur des flux d'entrée (encaissements), à une date donnée, est supérieure à la valeur des flux de sortie (décaissements) à la même date (date de valorisation des flux).

La valeur actuelle d'un projet représente l'enrichissement de l'investisseur résultant de sa réalisation.

► Calcul de la VAN et son utilisation.

Considérons, pour simplifier, un investissement de type "point-input"- continuous output" nécessitant une dépense initiale de $I_0 = CF_0$, réalisée à la date $t=0$ et dont on espère, au cours de sa durée de vie de n périodes annuelles, les cash-flows notés $CF_1, CF_2, \dots, CF_n$ supposés obtenus en fin de période.

La structure temporelle de ce type projet peut être schématisée comme suit:

$CF_0 = -I_0$	CF_1	CF_2	$\dots$	CF_t	CF_n
0	1	2	$\dots$	t	n

La valeur actuelle nette (au taux d'actualisation k) d'un tel projet est définie comme la différence, à la date, entre la valeur des cash-flows CF_t et la valeur de la dépense d'investissement, soit formellement:

$$VAN (-I_0, CF_1, \dots, CF_n, k, n) = CF_1(1+k)^{-1} + \dots + CF_t(1+k)^{-t} + \dots + CF_n(1+k)^{-n} - I_0$$

$$VAN (-I_0, CF_1, \dots, CF_n, k, n) = \sum_{t=0}^n CF_t(1+k)^{-t}$$

Cette relation montre que la valeur actuelle est une fonction de:

- La série des cash-flows (y compris la dépense initiale I_0).
- Le taux d'actualisation choisi k .
- La durée de vie du projet n .

On peut montrer que :

- Toutes choses restant égales par ailleurs, la valeur actuelle nette est une fonction strictement décroissante du taux d'actualisation k si les cash-flows (à l'exception de la dépense initiale) sont positifs.

- La valeur actuelle nette est une fonction croissante de sa durée de vie (si les cash-flows futurs ne deviennent pas négatifs).

- Il existe au moins une valeur n_0 de n pour laquelle la valeur actuelle nette est nulle. Cette valeur n_0 est le laps de temps nécessaire pour que le cumul des cash-flows actualisés couvre la valeur de la dépense d'investissement. n_0 est désigné dans la littérature financière sous le vocable de délai de récupération actualisé. et que l'on considère comme un autre critère de choix des investissements.

L'adoption d'un projet ayant une VAN positive, augmentant la richesse de l'entreprise, va dans le sens de l'objectif de maximisation de la valeur des actions.

► Inconvénients du critère de la VAN.

La valeur actuelle nette présente plusieurs inconvénients parmi lesquels on peut citer:

- l'impossibilité de comparer des VAN de projets dont la taille est différente (la taille de l'investissement conditionne obligatoirement le volume des flux attendus).

- l'impossibilité de comparer des VAN de projets dont la durée de vie est différente (le volume des flux actualisés s'en trouve également affecté).

- le calcul du taux de rendement requis pour tester l'investissement est une démarche délicate de par les nombreuses variables qui sont à prendre en considération. Or la VAN est très sensible à une variation de taux comme le montre le tableau ci-après.

- l'utilisation d'un taux unique pour actualiser les flux des différentes périodes de la vie économique d'un projet est une hypothèse fortement simplificatrice. En principe, pour actualiser le flux d'une période donnée on devrait tenir compte du taux au comptant estimé pour la période considérée.

2- Le taux de rentabilité interne (TRI).

Le taux de rentabilité interne, également dénommé « taux de rendement interne », « taux de rentabilité propre », « taux d'accumulation des flux de liquidité », « efficacité marginale du capital », peut être défini comme étant le taux d'actualisation qui égalise la valeur actuelle des décaissements à celle encaissements ou, ce qui revient au même, le taux qui annule la valeur actuelle nette (VAN).

Le taux ainsi calculé est comparé à un taux de rendement requis (TRR) qui représente la rentabilité minimale exigée par l'entreprise. Pour être acceptable, un projet doit être tel que $TRI > TRR$.

► Formulation

Sa formulation usuelle est la suivante:

$$I_0 - \sum_{t=1}^n CF_t(1+r^*)^{-t}$$

- I_0 représente l'investissement à l'instant 0 (ou la valeur des tranches d'investissement si ce dernier est réalisé en plusieurs tranches)
- CF_t le cash-flows généré par l'investissement à la période $[t-1 \quad t]$ (supposé obtenu à la fin de la période)
- t est distance temporelle séparant la date d'encaissement du cash-flow CF_t de la date de valorisation des flux (ici la date $t=0$)
- r^* le taux de rentabilité interne. Ce taux est une caractéristique du projet. Il représente l'aptitude de ce dernier à créer de la richesse. Il est considéré par certains comme objectif par rapport au taux utilisé pour calculer la VAN.

L'avantage essentiel de cette méthode est lié au fait qu'aucun élément exogène n'intervient dans le classement des projets dans la mesure où le taux de rendement requis n'est pas pris en considération dans le calcul. C'est donc une technique qui ne prend en compte que les données propres à l'investissement.

► Les Inconvénients du TRI.

Le TRI est un calcul actuariel. Il présente des limites importantes.

Le fondement de tout calcul actuariel est basé sur le réinvestissement systématique des flux dégagés à chaque période, et ceci sur la durée de vie de l'investissement. Ce réinvestissement se fait au taux utilisé dans la méthode. Cette hypothèse est peu réaliste, donc difficilement acceptable

La deuxième limite du TRI réside dans le fait qu'il est parfois non calculable et ayant des valeurs multiples dans d'autres situations .

3- Comparaison entre la VAN et le TRI.

Les deux critères des projets d'investissement ne conduisent toujours aux mêmes réponses (acceptation ou rejet des projets). Il arrive parfois que les réponses des deux tests se contredisent. Cela intervient pour des investissements concurrentiels ayant des structures de flux nets de liquidité différentes.

4-Le taux de rendement Global (TRG)

Le taux de rendement global apporte une solution au conflit entre VAN et TRI et au problème de TRI multiples.

Pour trouver le taux de rendement global, on calcule d'abord la valeur future des flux nets de trésorerie du projet (aux taux de rendement requis) à la fin de la durée de vie du projet. On calcule ensuite le taux de rendement qui égalise le flux d'investissement et la valeur capitalisée de tous les flux de liquidité, soit formellement :

Le Taux de rendement global est le taux tel que :

$$I_0 = \frac{\sum_{t=1}^n CF_t (1+k)^{n-t}}{(1+TRG)^n} \longleftrightarrow I_0((1+TRG)^n) = \sum_{t=1}^n CF_t (1+k)^{n-t}$$

où I_0 représente l'investissement initial.

k le taux de rendement requis (supposé le même pour toutes les périodes)

TRG le taux de rendement global

CF_t le flux net de trésorerie de la période t .

S'il répond parfaitement aux critiques que l'on peut émettre à l'égard du TRI, le taux de rendement global pose le problème de la détermination du taux de réinvestissement des flux de liquidité.

5- Conditions d'utilisation des critères fondés sur l'actualisation.

Les critères d'évaluation des projets d'investissement fondés sur l'actualisation soulèvent un certain nombre de difficultés dont la principale réside dans le choix du taux d'actualisation pour la VAN et le taux de référence pour le TRI.

Par ailleurs ces critères ne sont valables que sous certaines conditions:

- Le critère de la valeur actuelle nette suppose implicitement que les cash-flows dégagés par l'investissement sont réinvestis à un taux égal au taux d'actualisation.
- La méthode du taux de rendement interne suppose que les cash-flows sont réinvestis à un taux égal au taux de rendement interne.
- Les deux critères supposent également que les fonds disponibles sont illimités (absence de contraintes budgétaires).

III- Le taux de rentabilité requis d'un projet d'investissement

Le taux de calcul de la VAN et le taux de référence pour le TRI sont souvent le coût moyen pondéré du capital (CMPC). L'usage du CMPC du capital suppose que les projets étudiés appartiennent à la même classe de risque que ceux qui sont déjà exploités par l'entreprise

considérée; or il n'y a aucune raison qu'il en soit ainsi a priori et on devrait utiliser un taux d'actualisation spécifique pour chaque projet, appelé taux de rentabilité requis par le projet. C'est un taux ajusté en fonction du risque économique du projet considéré. Il n'y a pas un taux de rentabilité unique pour tous les projets qui peuvent être envisagés dans une entreprise. Bien au contraire, le taux de rentabilité requis est fonction du risque systématique du projet : à un risque plus élevé correspond un taux requis plus fort et *vice versa*. Ainsi, le coût réel du capital engagé dans un projet par une entreprise dépend de la prime de risque que le projet requiert. Pour reprendre la terminologie du modèle d'équilibre des actifs financiers (MEDAF), un projet d'investissement est acceptable si, et seulement si, son taux de rentabilité prévisionnel (espéré) est supérieur à son de rendement requis.

Le MEDAF permet de calculer le taux de rendement requis par le marché pour une action, tel qu'il compense exactement le risque de ce titre. Cette technique applicable au projet d'investissement conduira exactement au même résultat. En conséquence, appliquer le MEDAF au choix des investissements permet de calculer la valeur du taux de rendement ajusté pour le risque d'un projet.

Le taux de rendement requis sur le projet est en tous points semblable au calcul du rendement d'un titre par la méthode du MEDAF. Il s'exprime de la manière suivante :

$$E[r_j] = r_f + \beta_j(E(r_m) - r_f)$$

Où $E[r_j]$ est le rendement attendu du projet,

β_j le risque propre du projet qui est en fait son risque systématique.

$$\beta_j = \frac{\text{COV}[r_j, r_m]}{\text{VAR}[r_m]}$$

Les variables rendement du marché $E(r_m)$ et rendement libre de risque sont observées ou estimées. Par contre, β_j doit être calculé. Il sera déterminé à partir des caractéristiques économiques du projet et, de ce fait, représentera la part de risque économique dans le risque systématique. Si le projet est financé par endettement, β_j sera ajusté pour tenir compte de cette circonstance.

Dans un cas comme dans l'autre, le taux de rendement requis trouvé servira de taux d'actualisation dans le calcul d'une VAN ou une norme dans le calcul du TRI. Il faut remarquer que, comme pour les actions le modèle ne tient pas compte du risque spécifique du projet. C'est la responsabilité du décideur de l'entreprise de diversifier le portefeuille de ses actifs.

► Modalité de calcul

Le calcul du bêta du MEDAF appliqué à une action suppose de connaître le rendement du marché, le rendement libre de risque et le rendement estimé de cette action (rendement souvent calculé partir de données historiques). Il en va de même du projet. Si les deux premières variables ne posent pas plus de problèmes que dans le cas d'une action, il n'en va pas de même avec le rendement du projet qu'il faut calculer pour chaque période de sa durée de vie.

Ainsi pour une période donnée, le rendement sera :

$$r_t = \frac{V_t - V_{t-1} + F_t}{V_{t-1}}$$

Où V_t est la valeur du projet à la fin de la période t

F_t le flux de liquidité net reçu en fin de période t .

Evidemment, la difficulté dans cette approche réside dans la détermination de la valeur du projet en fin de période. On pourra par exemple prendre comme estimation la valeur sur le marché de l'occasion.

► Exemple d'application du MEDAF à l'évaluation des projets d'investissement.

La société anonyme LLS envisage l'achat d'une machine coûtant 110 000 D afin de traiter le lait collecté auprès des éleveurs de bétail de la région Nord- Ouest.. L'entreprise a déjà eu de semblables machines et pense que les données passées peuvent constituer une bonne approximation des performances futures. Afin de tester la rentabilité de cet investissement par la méthode du MEDAF, elle a réuni les informations suivantes concernant aussi bien les performances de la machine que celles du marché financier et des taux d'intérêt.

Périodes	Prix d'achat	Valeur vénale V_t	Flux d'exploitation après IS : F_t	Rendement du marché : r_{mt}	Rendement libre de risque r_{ft}
0	110000	110000			
1		100 000	20000	0.11	0.05
2		84000	27000	0.17	0.07
3		64000	22000	-0.02	0.06
4		53000	26000	0.25	0.08
5		40000	20 000	0.18	0.06
6		33000	18 000	0.28	0.07
7		24000	13000	-0.08	0.07
8		19000	12000	0.27	0.09
9		13000	8000	0.14	0.07
10		9000	5000	0	0.08

- Détermination du taux de rendement requis : (en considérant un financement intégral par capitaux propres).

	Rendement du	Rendement du	Rendement de
Périodes	marché : r_{mt}	projet: r_{jt}	l'actif sans risque
1	0.11	0.09090909	0.05
2	0.17	0.11	0.07
3	-0.02	0.02380952	0.06
4	0.25	0.234375	0.08
5	0.18	0.13207547	0.06
6	0.28	0.275	0.07
7	-0.08	0.12121212	0.07
8	0.27	0.29166667	0.09
9	0.14	0.10526316	0.07
10	0	0.07692308	0.08
Moyenne	0.13	0.14612341	0.07
VAR(r_m) =	0.01446		
COV(r_j, r_m) =	0.00814206		
β_j =	0.56307457		

En considérant un taux sans risque r_f égal à la moyenne, on obtient un taux de rendement requis du projet de :

$$E[r_j] = 0.07 + 0.56307457 (0.13 - 0.07) = 0.10378447$$

- Détermination de la VAN

Le taux de rendement requis tel qu'il vient d'être calculé est le taux d'actualisation servant à déterminer la VAN si le projet est financé exclusivement par capitaux propres. Dans le cas contraire, le β , et par suite le taux de rendement requis, doivent être corrigés pour tenir compte du risque financier induit par l'endettement.

	Facteurs		Cash-flows
Périodes	d'actualisation	Cash-flows	actualisés
1	0.90597397	20000	18119.4794
2	0.82078883	27000	22161.2984
3	0.74361331	22000	16359.4929
4	0.67369431	26000	17516.0519
5	0.6103495	20000	12206.9901
6	0.55296076	18000	9953.2937
7	0.50096805	13000	6512.58471
8	0.45386402	12000	5446.3682
9	0.41118898	8000	3289.51187
10	0.37252652	14000	5215.37122
somme			116780.442

Au taux de rendement requis, le projet dégage une valeur actuelle nette (un enrichissement)
de VAN = 116780.442 – 110 000 = 6780.4424

Remarque : Le cash-flow de la dernière année comprend le flux d'exploitation et la valeur résiduelle du projet.

► Exemple de choix contradictoire selon le CMPC et le MEDAF

Considérons une entreprise dont le coût moyen du capital a été estimé à 15 % et qui envisage deux projets i et j aux caractéristiques différentes: i est peu risqué, son bêta est de 0,6 et son taux de rentabilité prévisionnel de 14 % ; j a un bêta de 2, il est plus risqué et son taux de rentabilité prévisionnel est de 17 %. Si l'entreprise utilise comme taux de référence le coût moyen du capital, elle exigera un taux de 15 % pour les deux projets. Cela la conduira à rejeter i et à accepter j. Pareille décision peut être erronée, car elle ne tient pas compte de l'ajustement en fonction du risque systématique des projets.

Chaque projet doit être évalué en fonction de son propre risque systématique, 'c'est-à-dire de son propre bêta.

Considérons les données complémentaires :

- taux de rendement du marché :14 %
- taux sans risque : 10 %.

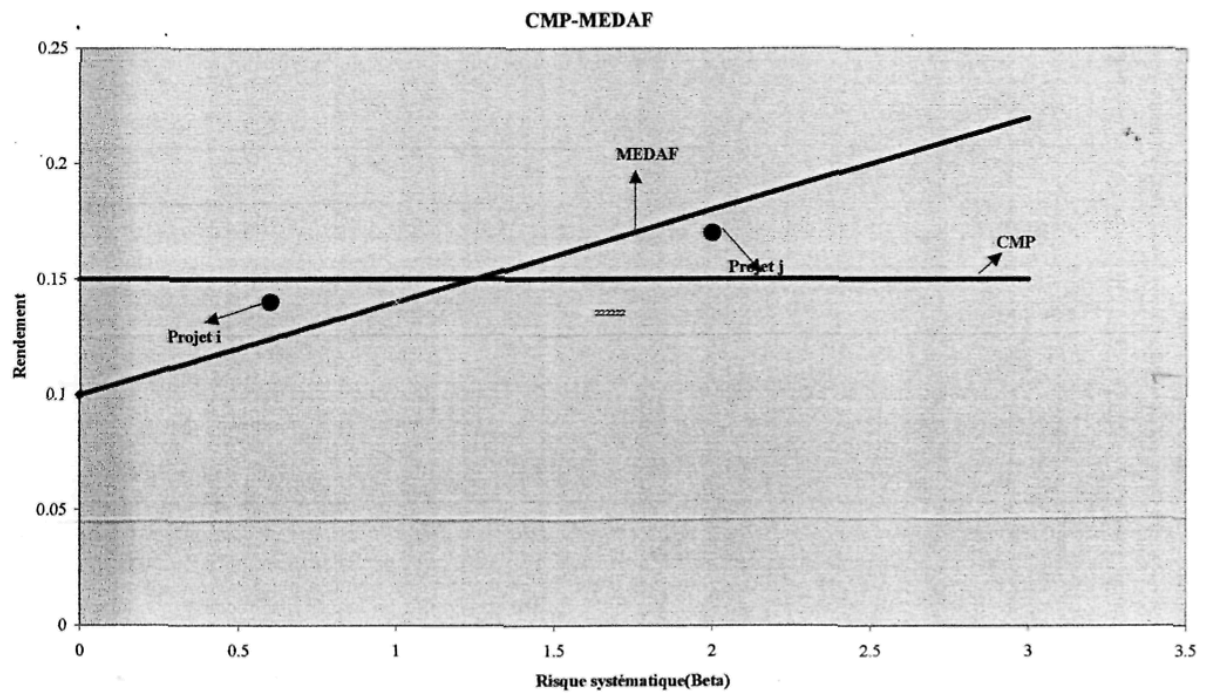
Selon ces données du marché, les projets exigent des primes de risque qui s'élèvent respectivement à:

Projet i

$$\text{Prime de risque} = \beta_i(\mu_m - r_f) = 0.6(0.14 - 0.1) = 0.024$$

Projet j

$$\text{Prime de risque} = \beta_j(\mu_m - r_f) = 2(0.14 - 0.1) = 0.08$$



En raison de son faible bêta, la prime de risque du projet i est faible ; à l'inverse le projet j a un risque systématique élevé et donc une prime de risque importante. En conséquence, le taux requis pour le projet i est de 12,4 % et celui du projet j de 18,0 %. La décision d'investir dans les projets devient la suivante : i doit être accepté car son taux prévisionnel (14 %) est supérieur au taux requis (12,4 %) ; en revanche, j doit être rejeté car son taux prévu (17 %) est inférieur au taux exigé selon la droite des actifs risqués

Chapitre III : La prise en compte de l'incertitude et du risque dans l'évaluation financière des projets.

Toute décision d'investissement repose sur des prévisions relatives aux flux de trésorerie (cash-flows) qui caractérisent les projets envisagés. Ces prévisions peuvent être plus ou moins probables, plus ou moins quantifiables et parfois totalement imprévisibles. Il est important, lorsqu'on procède à une décision d'investissement, de prendre conscience de cette incertitude qui caractérise l'environnement et d'en tenir compte dans le choix des critères retenus pour évaluer les différents projets.

I- Origines du risque dans la décision d'investissement.

Elles sont nombreuses et les plus fréquentes proviennent des erreurs dans l'analyse et l'estimation des diverses variables qui interviennent dans le calcul de la VAN dont notamment :

- la taille du marché.
- le taux de croissance du marché.
- la part de marché de l'entreprise.
- l'investissement nécessaire.
- la durée de vie de l'investissement pour la firme.
- la valeur résiduelle.
- le prix de vente des produits fabriqués.
- les coûts directs d'exploitation.
- les frais fixes.

Il est évident que le caractère plus moins contrôlable des variables dépend de leur nature. Si l'entreprise peut exercer une certaine maîtrise sur ses charges d'exploitation et ses frais fixes, son pouvoir d'action est très limité sur la taille du marché et son taux de croissance.

II- Les notions de risque et d'incertitude.

On associe généralement les termes de risque et d'incertitude bien qu'une distinction puisse être maintenue entre eux. Les deux notions sont liées en ce sens que le risque d'un projet d'investissement est la conséquence de l'incertitude associée à ce projet. Distinctes dans la mesure où un projet d'investissement aux résultats incertains n'est risqué que s'il est susceptible de générer des résultats non désirés.

Certains auteurs font reposer la distinction entre risque et incertitude sur les éléments suivants:

- Une situation risquée est définie comme une situation pour laquelle une distribution de probabilités objectives peut être associée aux résultats.
- Une situation incertaine est au contraire une situation aux résultats de laquelle ou bien on ne peut associer aucune distribution de probabilités ou bien on ne peut associer qu'une distribution de probabilités subjectives.

Cette distinction n'est pas sans poser quelques problèmes dès lors que l'on entend se situer dans le cadre réel des affaires. En effet, elle n'est valable que pour des décisions de type répétitif prises dans le cadre d'une économie relativement stable. Or, la majorité des décisions des chefs d'entreprise ne sont pas de ce type.

Par ailleurs, la distinction entre distributions de probabilités objectives et distributions de probabilités subjectives est souvent délicate.

Aussi de plus en plus d'auteurs ont jugé que devrait être considérée comme situation risquée toute situation pour laquelle une distribution de probabilité quelle qu'en soit la nature, pouvait être associée aux résultats.

Une situation incertaine étant inversement une situation pour laquelle aucune distribution de probabilités n'a pu être élaborée.

III- Les déterminants du risque d'un projet d'investissement

Deux éléments, qui pris conjointement, donnent une idée assez juste de la notion de risque d'un projet d'investissement. D'une part, l'incertitude des résultats associés au projet et, le caractère non désiré de certains de ses résultats d'autre part.

1. L'incertitude des résultats associés au projet

Un projet d'investissement n'est risqué que si ses résultats sont incertains, il est évident que dans le cas d'un projet d'investissement dont on connaîtrait à l'avance le niveau de sa rentabilité future, il n'y aurait aucune place pour la notion de risque : si ce niveau de rentabilité était supérieur à la norme minimale de rentabilité traditionnellement exigée par le chef d'entreprise de ses investissements, le projet d'investissement serait mis en œuvre et rapporterait le niveau de rentabilité tel qu'il avait été préalablement évalué; si ce niveau de rentabilité était au contraire inférieur à cette même norme, le projet serait tout simplement abandonné.

Le problème est de savoir si l'existence d'une incertitude des résultats associés à un projet suffit pour conférer à ce projet la nature de projet risqué. A cette question, la plupart des auteurs répondent par la négative. En effet, l'incertitude relative au rendement attendu d'un projet, condition nécessaire à l'apparition du risque pour un projet d'investissement, n'est pas en soi une condition suffisante à l'apparition d'un tel risque : pour qu'il y ait risque cette incertitude doit s'accompagner d'un caractère non désiré de certains des résultats attendus du projet.

2- Le caractère non désiré de certains des résultats du projet

Cet élément apparaît nettement lorsqu'il est demandé à des dirigeants d'entreprises de définir ce qu'ils entendent par risque d'un investissement. Une série d'interviews effectués par J.C.T. Mao⁽²⁾ auprès de dirigeants canadiens révèlent les résultats essentiels suivants :

- Quand l'engagement de fonds, qui résulterait de la réalisation d'un d'investissement est modéré, relativement aux ressources totales de l'entreprise, au risque du projet est associée la possibilité de ne pas atteindre un certain niveau objectif de rentabilité.

- Quand l'engagement de fonds qui résulterait de la réalisation d'un projet d'investissement est important, par rapport aux ressources totales de l'entreprise, au risque du projet est associée l'éventuelle insolvabilité de la firme que pourrait entraîner une mauvaise performance de l'investissement.

Dans tous les cas, ceci équivaut à distinguer parmi les écarts à un quelconque niveau objectif de rentabilité. Les écarts négatifs et les écarts positifs, les premiers seuls, non désirés, étant générateurs de risque pour le projet d'investissement. C'est ce concept de risque d'un projet d'investissement, intégrant directement le caractère non désiré de certains des résultats potentiels d'un projet d'investissement, et d'ailleurs conforme au sens qu'il a généralement dans le langage commun, qui à notre sens répondrait le mieux aux besoins des dirigeants d'entreprise lors de l'évaluation de leurs projets d'investissement.

Parmi les diverses mesures du risque habituellement proposées dans la littérature financière, un certain nombre d'entre elles correspondent parfaitement à la conception du risque telle qu'elle vient d'être précisée, d'autres moins.

Dans tous les cas, ceci équivaut à distinguer parmi les écarts à un quelconque niveau objectif de rentabilité. les écarts négatifs et les écarts positifs, les premiers seuls, non désirés, étant générateurs de risque pour le projet d'investissement.

C'est ce concept de risque d'un projet d'investissement, intégrant directement le caractère non désiré de certains des résultats potentiels d'un projet d'investissement, et d'ailleurs conforme au sens qu'il a généralement dans le langage commun, qui à notre sens répondrait le mieux aux besoins des dirigeants d'entreprise lors de l'évaluation de leurs projets d'investissement.

Parmi les diverses mesures du risque habituellement proposées dans la littérature financière, un certain nombre d'entre elles correspondent parfaitement à la conception du risque telle qu'elle vient d'être précisée, d'autres moins.

4- Les étalons de mesure du risque d'un projet d'investissement

Préalablement à toute mesure du risque d'un projet s'impose l'adoption d'un étalon de mesure.

Les étalons proposés s'avèrent le plus souvent, soit l'un des moments de la distribution des rendements attendus du projet d'investissement, soit une valeur significative estimée à partir de ces moments.

a- Un premier type d'étalon de mesure : un moment de la distribution des rendements attendus.

La formulation la plus générale de ce type d'étalon de mesure est celle de B.K. Stone⁽³⁾ :

Pour une distribution continue des rendements.

$$L(W_0, A, k) = \int_{-\infty}^A |W_i - W_0|^k dF(W) \quad (k \geq 0)$$

Pour une distribution discrète, la formule devient : $L(W_0, A, k) = \sum_{\text{Min } w_i}^A |W_i - W_0|^k p_i$

W_i correspondant à l'un quelconque des niveaux de rendements potentiels d'un projet d'investissement.

$F(W)$ correspondant à la fonction de répartition associée à la densité de probabilité $f(W)$ représentée page suivante :

Dans le cas discret, la densité de probabilité $f(w)$ est remplacée par la probabilité p_i d'apparition du rendement W_i

W_0 , A et k étant trois paramètres de l'étalon de mesure du risque qui, une fois spécifiés, permettent la mesure du risque d'un projet d'investissement.

W_0 concerne le problème de la nature de la norme de rentabilité utilisée lors du calcul des écarts : parmi ces normes éventuelles possibles notons particulièrement W la rentabilité moyenne attendue, W_p la rentabilité la plus probable (identique à la précédente si la densité de probabilité est symétrique), W_L la rentabilité minimale que l'on exige, préalablement à sa réalisation de tout projet d'investissement, W_N la rentabilité nulle, D la rentabilité en-deçà de laquelle la survie de la firme est compromise.

● A concerne le problème de la nature des écarts à la norme qu'il convient de prendre en considération. Ainsi :

si $A = +\infty$, cela signifie que l'on entend tenir compte de l'ensemble des observations W_i , que ces dernières soient supérieures ou inférieures à la norme choisie.

si $A = W_0$ cela signifie au contraire qu'on n'entend tenir compte que des observations se situant en deçà de la norme choisie.

B.K. Stone: A General Class of Three Parameter Risk Measures. Journal of Finance, june 1973.pp 675-685,

- k , enfin concerne le problème de *l'importance relative* à donner aux écarts retenus selon la dimension de ces écarts :

à $k = 1$ correspond la volonté de donner le même poids à tous les écarts retenus quelle que soit leur dimension;

à $0 < k < 1$ est associé un type de comportement équivalent à donner un plus grand poids aux petits écarts;

à $1 < k < +\infty$ est associé au contraire un type de comportement équivalent à donner un plus grand poids aux grands écarts.

A chaque combinaison de W_0 , A , k correspond une mesure possible du risque d'un projet d'investissement donné. C'est au *choix* de la combinaison correspondant le mieux à son comportement à l'égard du risque que devrait s'attacher le chef d'entreprise. Un tel *choix* est sans doute difficile : il est intéressant cependant de constater que la plupart des mesures traditionnelles du risque d'un projet d'investissement sont des cas particuliers de l'étalon de Stone et sont donc implicitement associés à certains types de comportement.

b- Quelques mesures traditionnelles du risque d'un projet :

Parmi les mesures du risque d'un projet les plus fréquemment proposées dans la littérature financière notons la variance, la semi-variance, l'écart moyen absolu, la perte moyenne attendue, la probabilité de perte et la probabilité de ruine associées à la distribution des rendements attendus de ce projet.

Le tableau ci-dessous, présentant brièvement les caractéristiques de ces diverses mesures montre aussi que chacune d'elles n'est qu'un cas particulier de la formule générale de Stone, une combinaison particulière des trois paramètres de celle-ci.

Mesure du risque	Valeurs des paramètres
Variance	$W_0 = \bar{W}$, $A = \infty$ $k=2$
Ecart-moyen Absolu	$W_0 = \bar{W}$, $A = \infty$ $k=1$
Semi-variance au sens de Markowitz	$W_0 = \bar{W}$, $A = W_0$ $k=2$
Semi-variance au sens de Mao	$W_0 = W_L$, $A = W_L$ $k=2$
Perte moyenne attendue	$W_0 = W_N = 0$, $A = 0$ $k=1$
Probabilité de perte	$W_0 = W_N = 0$, $A = 0$ $k=0$
Probabilité de ruine	$W_0 = D$, $A = D$ $k=0$

c- Un second type d'étalon de mesure : une valeur significative estimée à partir des rendements attendus du projet d'investissement.

► Le coefficient L de Baumol

Proposé à l'origine comme mesure du risque d'un placement en valeurs mobilières, l'usage de ce coefficient a été par la suite étendu à la mesure du risque d'un projet d'investissement quelconque.

Comme la semi-variance, il traduit une volonté de remplacer la variance par une mesure plus conforme à la notion de risque telle est ressentie par les investisseurs, à savoir l'éventualité d'obtenir un résultat non désiré.

Il s'exprime pour un projet i par : $L_i = \mu_i - \alpha \sigma_i$

Où μ_i est le rendement espéré, σ_i l'écart-type du rendement et α , unique pour les projets étudiés, traduit le degré d'aversion de l'investisseur à l'égard du risque.

► Le coefficient de variation

Le coefficient de variation, mesuré par le rapport entre l'écart-type de la distribution des rendements attendus et l'espérance mathématique de cette dernière, représente la dispersion relative des rendements du projet.

$$\text{Coefficient de variation} = \frac{\sigma_r}{E[r]}$$

Sous-jacent à l'adoption de cet étalon de mesure, est le raisonnement suivant : Etant donnée la valeur moyenne des rendements attendus, la probabilité d'obtenir des résultats indésirables est d'autant plus élevée, toutes choses égales par ailleurs, que la variance est grande.

Chapitre IV : L'insuffisance du critère espérance mathématique et la nécessité de tenir compte de l'attitude des décideurs vis-à-vis du risque: Le Paradoxe de Saint - Pétersbourg.

L'insuffisance du critère espérance mathématique a été mise en évidence par le mathématicien suisse Nicolas Bernoulli en 1728 lors de son application au problème connu sous le nom de " paradoxe " ou jeu de Saint Pétersbourg. Ce problème peut être énoncé ainsi : Un individu est invité à participer à un jeu dans lequel un arbitre impartial joue à pile ou face avec une pièce de monnaie. le jeu s'arrête lorsque " face " apparaît pour la première fois. L'individu reçoit une récompense de 2^n unités monétaires si face est obtenue pour la première fois au $n^{\text{ième}}$ lancer. (n pouvant varier de 1 à l'infini). Le tableau suivant présente les résultats possibles du jeu ainsi leurs probabilités d'obtention.

n^0 du lancer (*)	Gain	Probabilité
1	2^1	$1/2$
2	2^2	$(1/2)^2$
3	2^3	$(1/2)^3$
.	.	.
.	.	.
N	2^n	$(1/2)^n$

(*) Il s'agit du n^0 de lancer pour lequel " face " apparaît pour la première fois.

L'espérance mathématique de ce jeu est infinie : $\sum_{n=1}^{\infty} (2^n)(1/2)^n = \infty$. Pourtant, aucun

investisseur ne serait disposé à payer une somme importante pour participer à ce jeu. C'est ce constat qui est à l'origine de la remise en cause du principe de l'espérance mathématique de la première tentative pour élaborer un critère prenant en compte le comportement réel des individus.

I- La résolution du paradoxe de Saint-Pétersbourg

Gabriel Cramer et Daniel Bernoulli ont suggéré de généraliser le principe de l'espérance mathématique et ont proposé qu'une fonction croissante devrait être appliquée aux gains avant d'en prendre l'espérance mathématique. Une telle transformation a pour effet de réduire l'attrait pour le joueur des valeurs très élevées du gain, telles que celles pouvant résulter du jeu de Saint - Pétersbourg. On admit donc que les individus possèdent ce qu'on appelle aujourd'hui une fonction d'utilité, et qu'ils évaluent les projets d'investissement, non pas sur la base de l'espérance mathématique des rendements mais sur celle de leur espérance d'utilité.

II- Les fonctions d'utilité : Définition et Propriétés.

► Définition.

Une fonction d'utilité est une application définie sur le sous-ensemble des loteries certaines et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$$[\text{Sous-ensemble des loteries certaines}] \xrightarrow{U} \mathbb{R}$$

Qui associe à chaque loterie l un nombre réel $U(l)$

Cette application doit respecter les deux conditions suivantes :

- Si l'investisseur préfère la loterie l_1 à la loterie l_2 , alors on doit avoir $U(l_1) > U(l_2)$
- Si l'investisseur est indifférent entre les deux loteries l_1 et l_2 (on dit qu'elles sont équivalentes), alors on doit avoir $U(l_1) = U(l_2)$

► Propriétés des fonctions d'utilité.

• La fonction d'utilité est une fonction croissante.

Cette propriété découle directement de l'axiome 6 : Axiome de non- satiété: Cet axiome implique que toute fonction d'utilité doit être monotone croissante (et continue) de la richesse. L'auteur du choix est supposé " Gourmand ". Il préfère toujours plus à moins de richesse. Si l'on admet ce principe, on doit avoir :

$$w_1 > w_2 \Rightarrow U(w_1) > U(w_2) \text{ ou encore } \frac{dU(w)}{dw} > 0$$

• Les fonctions d'utilité sont des fonctions définies à une transformation linéaire positive près.

La fonction d'utilité est simplement une fonction qui exprime l'intérêt relatif que l'individu considéré accorde à différents niveaux de richesse. Le niveau absolu de l'utilité n'a pas beaucoup d'importance et on peut d'ailleurs prouver aisément que toute transformation linéaire positive d'une fonction d'utilité classera de la même manière un ensemble de choix en situation d'incertitude.

III- Aversion pour le risque et fonction d'utilité

Une façon simple de procéder pour caractériser l'attitude face au risque d'un individu consiste à le placer devant l'alternative suivante: ou bien participer à une loterie l par laquelle il peut obtenir un montant x avec une probabilité p et un montant y avec une probabilité $(1 - p)$, ou bien recevoir avec certitude l'espérance mathématique de gain de cette même loterie.

► Définition :

Un individu est réputé avoir de l'aversion pour le risque s'il préfère toujours obtenir l'espérance de gain d'une loterie plutôt que la loterie elle-même; ou, ce qui est équivalent, entre deux loteries de même espérance de gain, il choisira celle qui a la plus petite variance.

► Théorème:

Un individu a de l'aversion pour le risque si et seulement si sa fonction d'utilité Von Neumann-Morgenstern est strictement concave. Autrement dit, l'utilité marginale de la richesse doit être décroissante ($U'' < 0$).

IV- Mesures d'aversion au risque au sens d'Arrow-Pratt

Le signe de la dérivée seconde de la fonction d'utilité d'un individu nous indique quelle est son attitude face au risque. Mais comme toute fonction d'utilité est définie à une transformation linéaire positive près, la valeur même de cette dérivée ne permet pas d'estimer l'intensité de son aversion au risque. Pour évaluer quel est le degré d'aversion au risque d'un individu confronté à une loterie, Arrow (1965) et Pratt (1964) ont eu recours à la notion de prime de risque.

► La Prime de risque

La prime de risque correspond au montant maximum de richesse que l'individu est prêt à payer pour se défaire d'une loterie à laquelle il est soumis et obtenir avec certitude la valeur de son gain espéré. Si l'on considère un individu doté d'une richesse initiale certaine W_0 et dont le comportement vis à vis du risque est caractérisé par une fonction d'utilité U , cette prime est déterminée par la quantité π vérifiant l'égalité.

$$U(E[W_f] - \pi) = U(W_0 + E[I] - \pi) = E[U(W_0 + I)] = E[U(W_f)]$$

► Prime de risque et attitude envers le risque

Théorème

La prime de risque π est respectivement positive, nulle et négative pour les individus qui ont de l'aversion, neutres vis à vis à vis du risque et ayant un goût pour le risque.

► Notion d'équivalent certain.

L'équivalent certain de la richesse finale : $W_c = W_0 + I$ est le niveau de richesse W_c tel que :

$$U(W_c) = E[U(W_0 + I)].$$

V- Mesures locales d'aversion au risque

► Aversion Absolue pour le risque.

K Arrow (1965) et J Pratt (1964) ont pu montrer dans deux articles célèbres que la prime de risque π était constituée par le produit deux éléments aisément interprétables. Ils y sont parvenus à établir la formule analytique suivante.

$$\pi \approx \frac{1}{2} \sigma_l^2 \left[- \frac{U''(W_0)}{U'(W_0)} \right] \quad (E[l] \rightarrow 0)$$

Cette expression est la mesure (locale) de la prime de risque. Elle dépend de deux éléments: Le premier σ_l^2 (variance de la loterie) indique la taille du risque associée à la loterie; le second, soit le terme entre crochets , reflète quant lui l'attitude face au risque de l'individu (reflète en quelque sorte l'allure de la courbe d'utilité c'est à dire fondamentalement un élément subjectif spécifique à l'individu).

La prime de risque est d'autant plus grande que ce terme est élevé. Il mesure donc, pour les " petits " risques, l'intensité de l'aversion au risque de l'individu au niveau de la richesse W_0 . Cette expression permet de comprendre pourquoi des individus se trouvant dans des situations objectives identiques ont des primes de risque différentes.

On définit ainsi l'Aversion Absolue pour le Risque :

$$Aa(W_0) = - \frac{U''(W_0)}{U'(W_0)}$$

$$\pi \approx \frac{1}{2} \sigma_l^2 Aa(W_0)$$

► L'Aversion Relative pour le risque.

La dérivation de cette mesure est similaire à la précédente. Seules les données du problème sont modifiées puisque, comme son nom l'indique, le raisonnement est conduit en termes relatifs.

$$\pi' \approx \frac{1}{2} \sigma_r^2 \left[- W_0 \frac{U''(W_0)}{U'(W_0)} \right]$$

La fraction de richesse que l'individu est prêt à abandonner pour se débarrasser du risque est fonction de deux éléments :

- la quantité de risque mesurée ici par σ_r^2 (par la variance du rendement)
- un élément psychologique reflétant l'allure de la fonction d'utilité (donc l'attitude de

l'individu à l'égard du risque) et mesuré dans le cas présent par :

$$Ar(W_0) = - W_0 \frac{U''(W_0)}{U'(W_0)}$$

Cette expression s'appelle degré (ou coefficient) d'aversion relative au risque.

Bien entendu, elle est positive quand l'individu a de l'aversion au risque (on suppose toujours que la richesse d'un agent ne peut pas être négative).

Les caractéristiques de cette seconde mesure traduisent la manière dont un individu réagit lorsque sa richesse initiale et le risque auquel il fait face sont modifiés par un facteur proportionnel.

Exercices d'évaluation Financière de Projets

Cas n°1

La société S envisage le lancement d'un nouveau projet dont le coût est estimé à 500 000 Dinars et dont la durée de vie est de 5 ans.

L'investissement est réalisé en deux tranches :

- T=0 : 400 000 Dinars (terrain à 100 000 Dinars et équipements à 300 000 dinars)
- T=2 : 100 000 Dinars (équipements)

Les prévisions relatives à l'exploitation se présentent comme suit :

- Le chiffre d'affaires de la première année d'exploitation est de 400 000 Dinars et il augmentera annuellement (par rapport à l'année précédente) de 10%. Les matières consommées représentent 30% du chiffre d'affaires
 - Les charges fixes décaissables représentent : 100 000 Dinars (sur toute la période du projet)
- La société est exonérée d'impôt durant les deux premières années d'exploitation et son résultat sera par la suite imposé au taux de 40%
- L'amortissement est linéaire sur cinq ans
- Délai fournisseurs : 3 mois. Délai clients : 3 mois et ce à partir de la première année d'exploitation
- Les stocks de matières premières représentent trois mois de consommation de l'exercice suivant (la société doit constituer des stocks en vue de la première année d'exploitation)
- A la liquidation, le projet sera vendu à 200 000 Dinars

Question :

L'entreprise a-t-elle intérêt à réaliser le projet ?

Eléments de corrigé

Période	0	1	2	3	4	5
CA		400000	440000	484000	532400	585640
Consommation Matières premières		120000	132000	145200	159720	175692
Frais fixes décaissables		100000	100000	100000	100000	100000
Dotations aux amortissements		60000	60000	80000	80000	80000
Résultat impôtisable		120000	148000	158800	192680	229948
Impôt		0	0	63520	77072	91979.20
Résultat net		120000	148000	95280	115608	137968.80
Cash-flow potentiel		180000	208000	175280	195608	217969

Détermination des éléments du BFR

Période	0	1	2	3	4	5
Clients (3 mois du CA)		100000	110000	121000	133100	146410
Dettes fournisseurs (3 mois)		30750	33825	37207.5	40928.25	32942.25
Stok initial MP		30000	33000	36300	39930	43923
Consommation		120000	132000	145200	159720	175692
Achats MP	30000	123000	135300	148830	163713	131769
Stok final MP	30000	33000	36300	39930	43923	0
BFR	30000	102250	112475	123722.5	136094.75	113467.75
Variation du BFR	30000	72250	10225	11247.5	12372.25	-22627
récupération du BFR						113467.75

Détermination des cash-flows effectifs.

Période	0	1	2	3	4	5
Cash-flow potentiel	0	180000	208000	175280	195608	217969
Variation BFR	30000	72250	10225	11247.5	12372.25	-22627
Récupération du BFR	0	0	0	0	0	113467.75
Prix de cession	0	0	0	0	0	200000
Impôt sur plus value de cession	0	0	0	0	0	24000
Cash-flows effectifs	-30000	107750	197775	164032.5	183235.75	530063.55

2) détermination du TRI

Le TRI est par définition le taux d'actualisation qui égalise la valeur des flux d'entrée (les encaissements) à la valeur des flux de sortie (les décaissements), soit formellement r^* tel que :

$$-30\ 000 + 1077750(1+r^*)^{-1} + 197775(1+r^*)^{-2} + 1640325.75(1+r^*)^{-3} + 183235.75(1+r^*)^{-4} + 530063.55(1+r^*)^{-5} - 400\ 000 - 100\ 000(1+r^*)^{-2} = 0$$

La résolution de cette équation donne $r^* \approx 29\%$. Le projet est financièrement intéressant si son de rendement requis est inférieur à ce taux.

Cas n°2

EXERCICE 2 Etude de projet en situation de certitude (7 points)

Une entreprise décide de moderniser son matériel d'exploitation qui comprend deux machines achetées au prix global de 30 000 DT- Actuellement, ces machines sont à moitié amorties (fiscalement) mais sont encore exploitables pour une durée de 10 ans (date prévue pour la liquidation totale de l'entreprise).

Deux cas se présentent :

- Si le projet de modernisation est retenu, les anciennes machines seront vendues au prix de 4 000 DT et l'entreprise procédera à leur remplacement par deux nouvelles machines au prix de 55 000 DT la machine. Ces nouvelles machines pourraient être liquidées ensemble à 20 000 DT à la fin du projet.
- Si le projet n'est pas retenu, l'entreprise continuera à exploiter les anciennes machines et les liquidera ensemble au prix de 1 000 DT.

L'opération de modernisation permettra à l'entreprise :

- de compresser ses charges variables qui passent de 9 à 5,5 DT l'unité
- d'augmenter sa production de 2 000 à 3 000 unités.

Par ailleurs,

- aucun changement n'est prévu pour le prix de vente qui s'élève à 20 DT,
- aucun changement n'est prévu pour les charges fixes décaissables
- délai fournisseur = délai de stockage = 0 jours (avec et sans projet),
- Pour les 1000 unités supplémentaires, l'entreprise accordera un délai spécial de 3 mois de chiffre d'affaires pour ses clients.

Taux d'amortissement des machines : 10% Taux d'imposition : 40% Taux d'actualisation : 10%

Questions ;

- 1) L'opportunité de modernisation est-elle intéressante ?
- 2) Quel doit être le montant de la valeur résiduelle des anciennes machines à la liquidation totale de l'entreprise pour que les deux situations soient équivalentes ?

Eléments de corrigé

Le problème consiste à choisir entre deux projets exclusifs de même durée de vie:

Projet 1 : Garder les anciennes machines

Projet 2 : Les remplacer par de nouvelles machines

La durée de vie des nouvelles machines est de 10 ans qui est la durée de vie résiduelle des anciennes machine.

Le critère de sélection est la VAN.

Le projet 2 (remplacer les anciennes machines) est préférable au projet 1 (garder les anciennes machines) si sa valeur actuelle nette VAN₂ est supérieure à celle du projet 1 VAN₁.

Soit formellement : Projet 2 est préféré au projet 1 $\Leftrightarrow VAN_2 > VAN_1 \Leftrightarrow VAN_2 - VAN_1 > 0$

$$VAN_2 = CF_{12}(1+k)^{-1} + \dots + (CF_{t2}(1+k)^{-t} + \dots + CF_{n2}(1+k)^{-n} - I_{02})$$

$$VAN_1 = CF_{11}(1+k)^{-1} + \dots + (CF_{t1}(1+k)^{-t} + \dots + CF_{n1}(1+k)^{-n} - I_{01})$$

$$VAN_2 - VAN_1 > 0$$



$$[CF_{12} - CF_{11}](1+k)^{-1} + \dots + [CF_{t2} - CF_{t1}](1+k)^{-t} + \dots + [CF_{n2} - CF_{n1}](1+k)^{-n} - [I_{02} - I_{01}] > 0$$

Pour chacun des deux projets, le cash-flow de la période quelconque t est la différence entre la somme des recettes et la somme des dépenses :

$$CF_{t2} = \sum [R_{t2} - D_{t2}]$$

$$CF_{t1} = \sum [R_{t1} - D_{t1}]$$

L'écriture précédente est équivalente à:

$$[\sum (R_{12} - R_{11}) - \sum (D_{12} - D_{11})](1+k)^{-1} + \dots + [\sum (R_{t2} - R_{t1}) - \sum (D_{t2} - D_{t1})](1+k)^{-t} + \dots + [\sum (R_{n2} - R_{n1}) - \sum (D_{n2} - D_{n1})](1+k)^{-n} - [I_{02} - I_{01}] > 0$$

Cette dernière écriture montre que le problème de choix entre deux projets exclusifs est équivalent au problème d'acceptation ou de rejet d'un seul projet fictif (appelé parfois projet différentiel) caractérisé par :

- La même durée de vie que les deux projets concurrents.
- Une série de cash-flows (y compris les dépenses initiales) dont chacun est égal à la différence des cash-flows
- Pour déterminer le cash-différentiel de la période t, il n'est pas nécessaire de connaître la valeur du cash-flow de chacun des deux cash-flows à cette période. Seule la connaissance de la différence entre chaque recette et chaque dépense est nécessaire
- si certaines recettes ou dépenses prennent des valeurs identiques pour les deux projets. Les différences correspondantes sont alors nulles et n'affectent pas la valeur du cash-flow différentiel, donc la VAN du projet différentiel. Pour ce type de recettes ou de dépenses, la valeur peut être fixée arbitrairement dont le

cas où elle n'est pas connue comme c'est le cas pour les dépenses relatives aux charges fixes dans le cas présent.

En résumé :

le projet 2 (Remplacer les anciennes machines) est préférable au projet 1 (Garder les anciennes machines) $\Leftrightarrow$ la VAN du projet différentiel (au taux d'actualisation fixé à k) est > 0 .

Détermination des cash-flows de la première période

Projet 1: Garder l'ancienne machine		Projet 2: Remplacer l'ancienne machine		Projet différentiel	
Chiffre d'affaires	40000		60000		20000
Charges variables	18000		16500		-1500
Charges fixes	1000		1000		0
Dotations aux amortissements	3000		11000		8000
Résultat imposable	18000		31500		13500
Impôt	7200		12600		5400
Résultat net	10800		18900		8100
Cash-Flow potentiel	13800		29900		16100
Variation BFR			5000		5000
Cash-Flow effectif	13800		24900		11100

Détermination des cash-flows des périodes 2 à 5

Projet 1 : Garder l'ancienne machine		Projet 2 : Remplacer l'ancienne machine		Projet différentiel	
Chiffre d'affaires	40000		60000		20000
Charges variables	18000		16500		-1500
Charges fixes	1000		1000		0
Dotations aux amortissements	3000		11000		8000
Résultat imposable	18000		31500		13500
Impôt	7200		12600		5400
Résultat net	10800		18900		8100
Cash-Flow potentiel	13800		29900		16100
Variation BFR			0		0
Cash-Flow effectif	13800		29900		16100

Détermination des cash-flows des périodes 6 à 9

	Projet 1	Projet 2	Projet différentiel
Chiffre d'affaires	40000	60000	20000
Charges variables	18000	16500	-1500
Charges fixes	1000	1000	0
Dotations aux amortissements	0	11000	11000
Résultat imposable	21000	31500	10500
Impôt	8400	12600	4200
Résultat net	12600	18900	6300
Cash-Flow potentiel	12600	29900	17300
Variation BFR		0	0
Cash-Flow effectif	12600	29900	17300

Détermination des cash-flows de la dernière période (10)

	Projet1	Projet2	Projet différentiel
CA	40000	60000	20000
CV	18000	16500	-1500
CF	5000	5000	0
DAM	0	11000	11000
Plus value de cession	1000	20000	19000
Résultat impôt	18000	47500	29500
Impôt	7200	19000	11800
Résultat net	10800	28500	17700
Cash-Flow potentiel	10800	39500	28700
Variation BFR		0	0
Récupération du BFR		5000	5000
Cash-Flow effectif	10800	44500	33700

Détermination des dépenses initiales

Projet 1 : Aucune dépense d'investissement n'est nécessaire si l'entreprise décide de garder ses équipements : $I_{01} = 0$

Projet 2 : Dans le cas où l'entreprise décide de remplacer ses équipements, cette décision induit les flux suivants :

Dépense d'acquisition des nouvelles machines:	-110000
Prix de cession des anciennes machines	4000
Economie d'impôt sur moins value	+ 4400
Dépense effective d'investissement	- 101600

$$I_{20} = -101\ 600$$

La dépense d'investissement du projet différentiel est identique à celle du projet 2 puisque celle du projet 1 est nulle.

Détermination des valeurs actuelles nettes des projets.

	Cash-flows			Facteur	Cash-flows actualisés		
				d'actualisation à			
Période	Projet 1	Projet 2	Projet différentiel	10%	Projet 1	Projet 2	Projet différentiel
0	0	-101600	-101600	1	0	-101600	-101600
1	13800	24900	11100	0.909090909	12545.45455	22636.36364	10090.90909
2	13800	29900	16100	0.826446281	11404.95868	24710.7438	13305.78512
3	13800	29900	16100	0.751314801	10368.14425	22464.31255	12096.16829
4	13800	29900	16100	0.683013455	9425.585684	20422.10232	10996.51663
5	13800	29900	16100	0.620921323	8568.714258	18565.54756	9996.833301
6	12600	29900	17300	0.56447393	7112.371519	16877.77051	9765.39899
7	12600	29900	17300	0.513158118	6465.79229	15343.42774	8877.635445
8	12600	29900	17300	0.46650738	5877.992991	13948.57067	8070.577678
9	12600	29900	17300	0.424097618	5343.629991	12680.51879	7336.888798
10	10800	44500	33700	0.385543289	4163.867526	17156.67638	12992.80885
VAN					81276.51173	83206.03394	1929.522207

Si le coût du capital de l'entreprise (taux d'actualisation) est de 10%, la valeur actuelle nette du projet 2 (remplacer les anciennes machines) est supérieure à celle du projet 1 (garder les anciennes machines) de 1929.522, soit la VAN du projet différentiel.

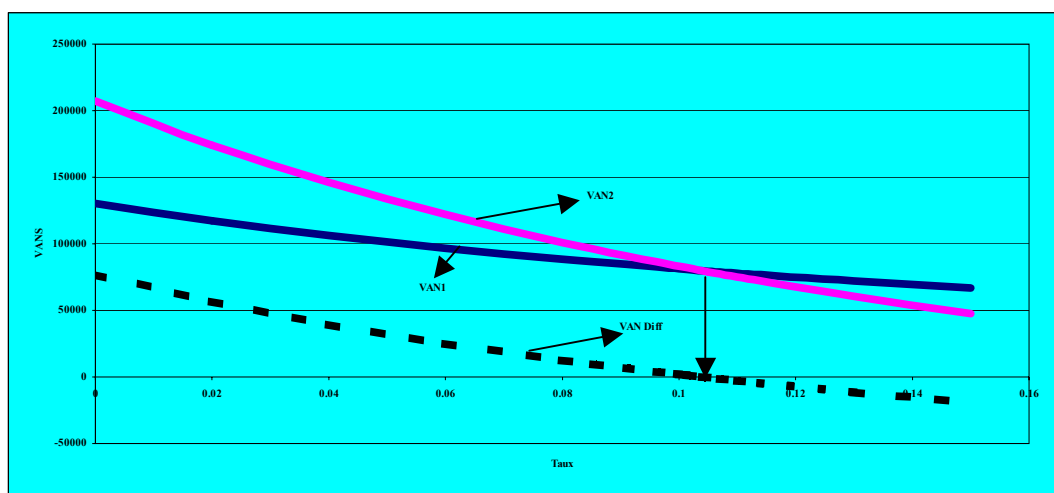
$$VAN2 - VAN1 = 83206.03394 - 81276.51173 = 1929.52220 = \text{VAN différentielle}$$

Donc, si le coût du capital est de 10% , l'entreprise a intérêt à remplacer les anciennes machines. Ce choix sera le même tant que le coût du capital reste inférieur à 10.39% comme le montre le tableau suivant :

				Facteur			
		Cash-flow		d'actualisation à		Cash-flow	
Période	Projet 1	Projet 2	Projet différentiel	10.39%	Projet 1	Projet 2	Projet différentiel
0	0	-101600	-101600	1	0	-101600	-101600
1	13800	24900	11100	0.905857463	12500.83299	22555.85083	10055.01784
2	13800	29900	16100	0.820577743	11323.97286	24535.27452	13211.30167
3	13800	29900	16100	0.743326473	10257.90532	22225.46153	11967.55621
4	13800	29900	16100	0.673347833	9292.200092	20133.1002	10840.90011
5	13800	29900	16100	0.609957159	8417.408801	18237.71907	9820.310268
6	12600	29900	17300	0.552534245	6961.931487	16520.77393	9558.842439
7	12600	29900	17300	0.500517269	6306.517595	14965.46636	8658.948761
8	12600	29900	17300	0.453397304	5712.806029	13556.57939	7843.773357
9	12600	29900	17300	0.410713331	5174.987976	12280.32861	7105.340634
10	10800	44500	33700	0.372047736	4018.115553	16556.12427	12538.00872
VAN					79966.6787	79966.6787	-1.60646E-07

Pour un coût du capital (taux d'actualisation) de 10.39%, les valeurs actuelles nettes des deux projets sont identiques ($VAN2 = VAN1 = 79966.6787$) ; les deux projets sont équivalents. Ce même taux conduit à une $VAN = 0$ pour le projet différentiel. Donc, il représente son taux de rendement interne.

Le graphique suivant synthétise ces différentes observations.



Question 2:

La question posée revient à dire quelle doit être la valeur résiduelle des anciennes machines pour que les valeurs actuelles nettes (à 10%) des deux projets soient identiques ou, ce qui revient au même, pour que la valeur actuelle nette (à 10%) du produit différentiel soit nulle.

La valeur résiduelle des anciennes machines n'affecte que le dernier cash-flow du projet 1 et du projet différentiel. Appelons y la valeur du dernier cash-flow du projet différentiel conduisant à une valeur actuelle nette nulle.

La traduction formelle des développements précédents est la suivante :

$$11100(1.1)^{-1} + 16100(1.1)^{-2} + 16100(1.1)^{-3} + 16100(1.1)^{-4} + 16100(1.1)^{-5} + 17300(1.1)^{-6} + 17300(1.1)^{-6} + 17300(1.1)^{-7} - 17300(1.1)^{-8} - 17300(1.1)^{-9} + y(1.1)^{-10} - 101600 = 0$$

$$90536.71335 + y(0.385543289) = 101600 \Rightarrow y = \text{Valeur du dernier cash-flow différentiel} = 28695.31633$$

Désignons par VRAM la valeur résiduelle des anciennes machines conduisant à un cash-flow du projet différentiel relatif à la dernière période égal à 28695.31633

Le tableau suivant décrit les calculs conduisant au dernier cash-flow du projet différentiel :

	Projet 1	Projet 2	Projet différentiel
CA	40000	60000	20000
CV	18000	16500	-1500
CF	F	F	0
DAM	0	11000	11000
Valeur résiduelle	VRAM	20000	20000 - VRAM
Résultat imposable	22000 - (F - VRAM)	52500 - F	30500 - VRAM
Impôt	8800 - 0.4(F - VRAM)	21000 - 0.4F	12200 - 0.4VRAM
Résultat net	13200 - 0.6(F - VRAM)	31500 - 0.6F	18300 - 0.6VRAM
Cash-Flow potentiel	13200 - 0.6(F - VRAM)	42500 - 0.6F	29300 - 0.6VRAM
Variation BFR		0	
Récupération BFR		5000	5000
Cash-Flow effectif	13200 - 0.6(F - VRAM)	47500 - 0.6F	34300 - 0.6VRAM

On a donc l'égalité suivante:

$$34300 - 0.6VRAM = 28695.31633 \Leftrightarrow 0.6VRAM = 5604.683675 \Rightarrow \boxed{VRAM = 9341.139458}$$

Cas n°3 : Sélection de projets en situation d'incertitude : Prise en compte du risque et de l'attitude de l'investisseur vis-à-vis du risque.

Un investisseur doit choisir entre deux projets d'investissement risqués A et B dont les caractéristiques sont résumées ci-dessous.

- Durée de vie commune : 2 ans
- Dépenses d'investissement (effectuées au début de la première année) : $IA = 1700$; $IB = 2500$
- Cash-flows probables (supposés être obtenus en fin de période)

	Projet A			Projet B	
	Cash-flow	Probabilité		Cash-flow	Probabilité
	1100	0.3		1850	0.3
Année1	1350	0.5		2000	0.4
	1500	0.2		2450	0.3
	1300	0.2		1700	0.2
Année2	1400	0.6		1900	0.5
	1600	0.2		2100	0.3

Autres renseignements

- Les cash-flows sont indépendants
- Le rendement exigé par l'investisseur compte tenu du risque (taux d'actualisation) est de 25%.

Questions

1°)

a) Etablir, pour chacun des deux projets :

- la distribution de la valeur actuelle nette.
- Son espérance mathématique : $E[VAN]$
- Son Ecart - type : σ_{VAN}

b) Classer les deux projets selon :

-L'espérance de la valeur actuelle nette : $E[VAN]$

-Le risque, mesuré par σ_{VAN}

-Les deux classements sont-ils convergents ?. Cette situation vous paraît-elle normale ?

2°) En situation d'incertitude et de risque, les investisseurs adoptent souvent comme critère de choix entre les projets d'investissement une fonction du type :

$$L[E(VAN), \sigma_{VAN}] = E(VAN) - \alpha \sigma_{VAN}$$

qui tient compte à la fois de l'importance de la valeur actuelle nette espérée du projet($E(VAN)$), de la taille de son risque (σ_{VAN}) et du comportement de l'investisseur vis à vis du risque que traduit le paramètre α

- a) Quelle condition doit respecter le paramètre α selon le type de comportement de l'investisseur vis à vis du risque (préférence pour le risque, neutralité envers le risque et aversion pour le risque).
- b) A quelles notions classiques peut-on assimiler les deux expressions suivantes :
 - $\alpha\sigma\text{VAN}$
 - $E(\text{VAN}) - \alpha\sigma\text{VAN}$
- 3) On se place dans le cadre de l'hypothèse habituelle d'aversion au risque :
- a) Etudier la fonction $L[E(\text{VAN}), \sigma\text{VAN}] = E(\text{VAN}) - \alpha\sigma\text{VAN}$ en fonction des variables $E(\text{VAN})$ et σVAN
- c) Déterminer, pour chacun des deux projets, la valeur de la fonction L en fonction du coefficient d'aversion au risque α de l'investisseur. Discuter en fonction de α le choix de l'investisseur.

Eléments de Corrigé

1-Etablissement de la distribution de la valeur actuelle nette pour chacun des deux projets.

Les cash-flows étant indépendants, la distribution de chaque projet est composée de 9 valeurs possibles.

Projet A :

$\text{VAN1} = \frac{1100}{(1.25)}$	+	$\frac{1300}{(1.25)^2}$	- 1700	probabilité associée
=0.06				
$\text{VAN2} = \frac{1100}{(1.25)}$	+	$\frac{1400}{(1.25)^2}$	- 1700	probabilité associée =0.18
$\text{VAN3} = \frac{1100}{(1.25)}$	+	$\frac{1600}{(1.25)^2}$	- 1700	probabilité associée =0.06
$\text{VAN4} = \frac{1350}{(1.25)}$	+	$\frac{1300}{(1.25)^2}$	- 1700	probabilité associée =0.1
$\text{VAN5} = \frac{1350}{(1.25)}$	+	$\frac{1400}{(1.25)^2}$	- 1700	probabilité associée =0.3

$$\text{VAN6} = \frac{1350}{(1.25)} + \frac{1600}{(1.25)^2} - 1700 \quad \text{probabilité associée} = 0.1$$

$$\text{VAN7} = \frac{1500}{(1.25)} + \frac{1300}{(1.25)^2} - 1700 \quad \text{probabilité associée} = 0.04$$

$$\text{VAN8} = \frac{1500}{(1.25)} + \frac{1400}{(1.25)^2} - 1700 \quad \text{probabilité associée} = 0.12$$

$$\text{VAN9} = \frac{1500}{(1.25)} + \frac{1600}{(1.25)^2} - 1700 \quad \text{probabilité associée} = 0.04$$

Projet B :

$$\text{VAN1} = \frac{1850}{(1.25)} + \frac{1700}{(1.25)^2} - 2500 \quad \text{probabilité associée} = 0.06$$

$$\text{VAN2} = \frac{1850}{(1.25)} + \frac{1900}{(1.25)^2} - 2500 \quad \text{probabilité associée} = 0.15$$

$$\text{VAN3} = \frac{1850}{(1.25)} + \frac{2100}{(1.25)^2} - 2500 \quad \text{probabilité associée} = 0.09$$

$$\text{VAN4} = \frac{2000}{(1.25)} + \frac{1700}{(1.25)^2} - 2500 \quad \text{probabilité associée} = 0.08$$

$$\text{VAN5} = \frac{2000}{(1.25)} + \frac{2100}{(1.25)^2} - 2500 \quad \text{probabilité associée} = 0.2$$

$$\text{VAN6} = \frac{2000}{(1.25)} + \frac{2100}{(1.25)^2} - 1700 \quad \text{probabilité associée} = 0.12$$

$$\text{VAN7} = \frac{2450}{(1.25)} + \frac{1700}{(1.25)^2} - 2500 \quad \text{probabilité associée} = 0.06$$

$$\text{VAN8} = \frac{2450}{(1.25)} + \frac{1900}{(1.25)^2} - 25000 \quad \text{probabilité associée} = 0.15$$

$$VAN9 = \frac{2450}{(1.25)} + \frac{2100}{(1.25)^2} - 2500 \quad \text{probabilité associée} = 0.09$$

Le tableau suivant résume ces calculs.

	Projet A				Projet B		
VAN°	Valeur	Probabilité		VAN°	Valeur	Probabilité	
1	12	0.06		1	68	0.06	
2	76	0.18		2	196	0.15	
3	204	0.06		3	324	0.09	
4	212	0.1		4	188	0.08	
5	276	0.3		5	316	0.2	
6	404	0.1		6	444	0.12	
7	332	0.04		7	548	0.06	
8	396	0.12		8	676	0.15	
9	524	0.04		9	804	0.09	

-Etablissement des espérances mathématiques et des variances

Projet A

VAN°	Valeur	Probabilité	Espérance	Variance
1	12	0.06	0.72	3479.0784
2	76	0.18	13.68	5626.4832
3	204	0.06	12.24	142.8864
4	212	0.1	21.2	166.464
5	276	0.3	82.8	161.472
6	404	0.1	40.4	2286.144
7	332	0.04	13.28	250.9056
8	396	0.12	47.52	2460.7488
9	524	0.04	20.96	2941.9776
Somme			252.8	17516.16

$E(VAN) = 252.8$

$Variance(VAN) = 17516.16$

$Ecart\text{-}type\ VAN = \sigma_{VAN} = 132.3486305$

	Projet B			
VAN°	Valeur	Probabilité	Espérance	Variance
1	68	0.06	4.08	6645.3504
2	196	0.15	29.4	6291.456
3	324	0.09	29.16	530.8416
4	188	0.08	15.04	3622.7072
5	316	0.2	63.2	1438.208
6	444	0.12	53.28	223.9488
7	548	0.06	32.88	1300.0704
8	676	0.15	101.4	11360.256
9	804	0.09	72.36	14631.3216
Somme			400.8	46044.16

$$E(VAN) = 400.8$$

$$\text{Variance}(VAN) = 46044.16$$

$$\text{Ecart-type } VAN = \sigma_{VAN} = 214.5790297$$

b- Classement des projets

Selon le critère de la VAN espérée c'est le projet B qui est le plus intéressant.

Selon le risque, mesuré par σ_{VAN} , c'est le projet A qui est le meilleur (le moins risqué).

Le classement n'est pas convergent. Cette situation est normale car l'objet même de la finance consiste à arbitrer entre rendement et risque.

2°)

a) Le coefficient α traduisant l'attitude de l'investisseur envers le risque est estimé (en théorie de l'utilité) par le rapport

$$\alpha = - \frac{U''(W)}{U'(W)}$$

Où $U'(W)$ et $U''(W)$ sont les dérivées première et seconde de la fonction d'utilité $U(W)$ de l'investisseur.

- Un investisseur préfère le risque $\Leftrightarrow$ sa fonction d'utilité est convexe $\Leftrightarrow \alpha < 0$

- Un investisseur est neutre vis à vis du risque $\Leftrightarrow$ sa fonction d'utilité est linéaire $\Leftrightarrow \alpha = 0$

- Un investisseur est averse au risque $\Leftrightarrow$ sa fonction d'utilité est concave $\Leftrightarrow \alpha > 0$

b) L'expression $\alpha \sigma_{VAN} \approx - \frac{U''(W)}{U'(W)} \sigma_{VAN}$ est similaire à la quantité

$$\pi \approx \frac{1}{2} \frac{U''(W)}{U'(W)} \sigma^2_{VAN} \quad \text{qui n'est autre que la prime de risque selon}$$

l'approximation D'ARROW- PRATT.

Si on assimile $\alpha \sigma_{VAN}$ à la prime de risque, l'interprétation de l'expression :

$E(VAN) - \alpha \sigma_{VAN}$ devient évidente. Il s'agit de l'équivalent certain de la VAN.

3)

a) -Si on se place dans le cadre de l'hypothèse d'aversion au risque, il est clair que la fonction

$L[E(VAN), \sigma VAN] = E(VAN) - \alpha \sigma VAN$ est croissante de $E(VAN)$ et décroissante de σVAN .

En effet :

$$\frac{\partial L[E(VAN), \sigma VAN]}{\partial E(VAN)} = 1$$

$$\frac{\partial L[E(VAN), \sigma VAN]}{\partial \sigma VAN} = -\alpha < 0 \quad (\alpha > 0)$$

b-

$$LA = L[E(VANA), \sigma VANA] = E(VANA) - \alpha \sigma VANA$$

$$LB = L[E(VANB), \sigma VANB] = E(VANB) - \alpha \sigma VANB$$

Le projet B est préféré au projet A :

$$\text{si } LB > LA \Leftrightarrow E(VANB) - \alpha \sigma VANB > E(VANA) - \alpha \sigma VANA$$

$$\Leftrightarrow E(VANB) - E(VANA) > \alpha (\sigma VANB - \sigma VANA)$$

$$\Leftrightarrow \frac{E(VANB) - E(VANA)}{(\sigma VANB - \sigma VANA)} > \alpha$$

Application numérique

$$E(VANB) - E(VANA) = 400.8 - 252.8 = 148$$

$$(\sigma VANB - \sigma VANA) = 214.5790297 - 132.3486305 = 82.23$$

$$\alpha < \frac{E(VANB) - E(VANA)}{(\sigma VANB - \sigma VANA)} = \frac{148}{82.23} \approx 1.8$$

En résumé, le projet B sera préféré au projet A si le coefficient d'aversion au risque α ne dépasse la valeur limite 1.8